



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

BELIL Nadjat

Sujet

Equation de Daugavet

Devant le jury :

DILMI Mustapha

Mostefa NADIR

KHIRANI Amina

MCB. Univ de Msila

Prof. Univ de Msila

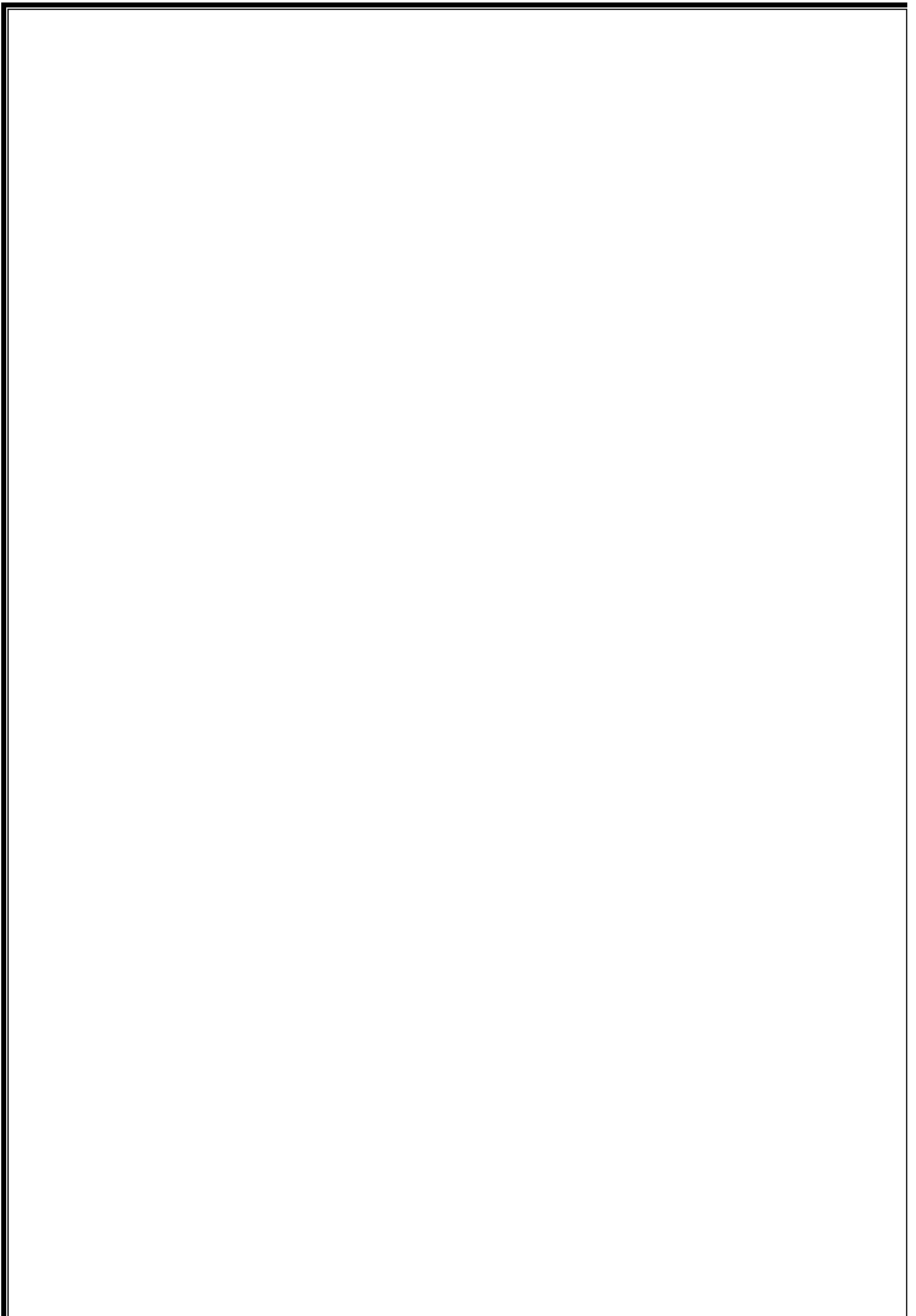
MCB. Univ de Msila

Président

Encadreur

Examineur

Promotion : 2018 / 2019



Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir
donnée la possibilité de terminer ce travail

Je tiens à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de
mémoire, **Professeur Mostefa Nadir**, pour ces conseils et son encouragement durant la
période de la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Je remercie sincèrement les membres du jury:

Docteur: DILMI Mustapha, d'avoir accepté la présidence du jury

Aussi je remercie vivement

Docteur: KHIRANI Amina, d'avoir accepté l'examinateur de ce travail

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de M'SILA.

Dédicace

Je dédis ce modeste travail à mon cher père, Puisse Dieu avoir pitié de lui

A ma chère mère

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

A mes très chères soeurs, et mon beau frère

A ma chère amie et soeur **TAACHOUCHE Nour elhouda**

A tous ma famille

A tous les amis

A tous les étudiants d'université de M'SILA

A tous

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 2 |
| 1 opérateurs compacts | 4 |
| 1.1 Compacité | 4 |
| 1.1.1 Recouvrements. | 4 |
| 1.1.2 Ensembles compacts. | 4 |
| 1.1.3 Ensemble relativement compacts | 5 |
| 1.1.4 compacité dans $C(\Omega)$: | 6 |
| 1.2 Opérateurs linéaires bornés | 6 |
| 1.2.1 Opérateurs continus | 6 |
| 1.2.2 Opérateurs borné | 7 |
| 1.3 Opérateurs compacts | 7 |
| 1.3.1 Opérateurs linéaires compacts | 7 |
| 1.3.2 opérateur intégrant | 10 |
| 1.3.3 Opérateur adjoint | 11 |
| 2 Equation Daugavet | 13 |
| 2.1 Introduction | 13 |
| 2.1.1 Le spectre d'un opérateur | 14 |
| 2.2 Equation de Daugavet | 15 |
| 2.2.1 produit tensoriel | 17 |
| 2.3 la propriété Daugavet | 21 |

| | |
|----------------------|-----------|
| Bibliographie | 22 |
|----------------------|-----------|

Introduction

La propriété de Daugavet est une propriété en mathématiques, dans le domaine de l'analyse fonctionnelle.

Le résultat suivant fut mis en évidence par I. K. Daugavet en 1963 pour tout opérateur compact T sur l'espace de Banach $C([0, 1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, on a l'égalité $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$ où Id désigne l'identité sur X . Cette dernière équation est connue sous le nom de équation de Daugavet.

Jusqu'à la fin des années 1990, on cherche à étendre cette propriété à d'autres classes d'opérateurs ou à d'autres types d'espaces. Citons par exemple les espaces de Lebesgue L_p .

Dans les espaces de Lebesgue $L_1(\mu)$ et L_∞ l'opérateur compact T satisfait l'équation de Daugavet.

Dans ce mémoire on étudie la propriété de Daugavet généralement dans les espaces de Banach uniformément convexes (en particulier les espaces L_p pour $1 < p < \infty$).

Dans le premier chapitre, on a trois parties, la première partie sur la compacité, où nous avons d'abord mis en définition d'ensemble compact et relativement compact, je l'ai mentionné le théorème d'Arzila Ascoli, puis on parle un peu sur les Opérateurs linéaires bornés et en fin de ce Chapitre, on donne la définition et les propriétés élémentaires des opérateurs compacts sur les espaces de Banach et de Hilbert. et je prend l'opérateurs intégrant comme un exemple d'opérateurs compacts d'après le théorème d'Arzila Ascoli.

Dans le deuxième chapitre, on commence avec une définition formelle (d'équation de Daugavet), on examine l'équation de Daugavet sur les espaces de Banach uniformément convexe, définition des théorèmes et juste un exemple j'ai fini mon mémoire par la propriété de Daugavet.

En fait, mon mémoire est juste une définition ou une disposition d'un sujet "**l'équation de Daugavet**"

Notations

| | |
|------------------------------------|--|
| $\ \cdot\ _X$ | Est défini une norme sur X . |
| $\mathcal{C}(K)$ | Espace des fonctions continues de \mathbb{K} dans \mathbb{R} . |
| $l_p(X)$ | Espace des suites (x_n) dans X absolument p -sommables. |
| $l_p^\omega(X)$ | Espace des suites (x_n) dans X faiblement p -sommables. |
| l_p | Espace des suites scalaires. |
| $\mathcal{L}(X, Y)$ | Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y . |
| $\mathcal{L}(X, \mathbb{k}) = X^*$ | Le dual topologique de X |
| \mathbb{k} | Corps des scalaires ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). |

Chapitre 1

opérateurs compacts

1.1 Compacité

1.1.1 Recouvrements.

Définition 1.1.1

Un recouvrement d'une partie G de E est une famille $H = \{\Omega_j\}$ dont la réunion contient G , donc $G \subset \bigcup \Omega_j$. Le recouvrement $H = \{\Omega_j\}$ de G est dit un recouvrement ouvert si chacun Ω_j est ouvert. Si on peut trouver $H' = \{\Omega_{j1}, \Omega_{j2}, \dots, \Omega_{jn}\}$ telle que $G \subset \Omega_{j1} \cap \Omega_{j2} \cap \dots \cap \Omega_{jn}$, on dit que H est un recouvrement fini de G .

Théorème 1.1.1 (Heine- borel)

de tout recouvrement $H = \{\Omega_j\}$ d'intervalles bornés et fermés $G = [a, b]$, contient un recouvrement fini.

Exemple 1.1.1

Soit H un sous-ensemble de forme $H = \{\Omega_j = [j, j + 1[, j \in \mathbb{Z}\}$ H est un recouvrement de \mathbb{R} car $\forall j \in \mathbb{R}, \exists$ un Ω_j tq $j \in \Omega_j$.

1.1.2 Ensembles compacts.

Définition 1.1.2

Soit X un espace topologique. G un-sous ensemble de X est dit compact si de tout recouvrement ouvert de G on peut extraire un sous-recouvrement fini $\forall_j, j \in J$ (ouverts) tels que, $G \subset \bigcup_{j \in J} \Omega_j, \exists \Omega_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n$ tel que $G \subset \bigcup_{k=1}^n \Omega_{j(k)}$.

Définition 1.1.3

Un ensemble G de E est dit séquentiellement compact si et seulement si pour toute suite d'éléments de G contient une sous-suite convergente vers un élément dans G

Théorème 1.1.2

Dans un espace normé un sous-ensemble est compact si et seulement si est séquentiellement compact.

Théorème 1.1.3

Tout intervalle réel borné et fermé $G = [a, b]$ est compact.

Remarque 1.1.1

L'intervalle ouvert et borné $]a, b[$, l'intervalle ouvert fermé et borné $]a, b]$, et l'intervalle $[a, b[$ fermé ouvert et borné ne sont pas des compacts.

1.1.3 Ensemble relativement compacts**Définition 1.1.4**

Un ensemble G dans un espace normé E est dit relativement compact si la fermeture \overline{G} est compact.

Proposition 1.1.1

Soit E un espace métrique. Un sous-ensemble G de E est compact si toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G , contient une sous-suite $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente dans E .

Théorème 1.1.4

Tout ensemble borné et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.

1.1.4 compacité dans $C(\Omega)$:

$C(\Omega)$ L'espace des fonction continues a valeurs réelles ou complexes sur le compact $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)|$.

Théorème 1.1.5 (Arzela-Ascoli)

Un sous-ensemble $G \subset C(\Omega)$ est relativement compact dans $C(\Omega)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

G bornée:

Il existe $M > 0$, $|\varphi(x)| \leq M, \forall x \in \Omega$ et $\forall \varphi \in G$.

G équicontinue:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in \Omega, |x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \forall \varphi \in G$.

1.2 Opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Opérateurs continus

Définition 1.2.1 (opérateur linéaire)

Soient E et F deux espace normé, un opérateur T défini sur E dans F est dite linéaire, s'il vérifie les condition suivantes:

pour tout x, y dans E , α et β dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

i) $Tx \in F$

ii) $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$

Définition 1.2.2

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur T défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si on a la propriété suivante:

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = T(x_0)$$

1.2.2 Opérateurs borné

Définition 1.2.3

Un opérateur linéaire T défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E$$

La plus petite des constante C vérifiant la relation est appelée normé de T notée $\|T\|$ et donnée par

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F$$

Proposition 1.2.1

Si E est de dimension finie alors toute opérateurs linéaire de E dans F est borné (et ceci ne dépend pas des choix des norme sur E et F)

1.3 Opérateurs compacts

1.3.1 Opérateurs linéaires compacts

Définition 1.3.1

Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Théorème 1.3.1 (critère de compacité)

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F .

Théorème 1.3.2

Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Démonstration

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E et soit $\{A\varphi_n\}$ une suite de F , alors $A\varphi_n(x) = \alpha A_1\varphi_n(x) + \beta A_2\varphi_n(x)$, avec $\varphi_n \in E, n \in \mathbb{N}$. A_1 et A_2 étant compacts, on peut extraire de $\{A_1\varphi_n\}$ et de

$\{A_2\varphi_n\}$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $\{A\varphi_n\}$, donc A est compact.

Théorème 1.3.3

Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.

Démonstration

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autre part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact.

Théorème 1.3.4

Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F convergentes en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

Alors A est compact.

Démonstration

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E , l'opérateur A_1 étant compact, on peut extraire de la suite $\{A_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente, soit $\{\varphi_n^1\}$ une sous suite de $\{\varphi_n\}$ telle que, $\{A_1\varphi_n^1\}$ soit convergente.

De la même façon, on peut extraire de la suite $\{A_2\varphi_n^1\}$ une sous suite convergente, car A_2 est compact; soit $\{\varphi_n^2\}$ une sous suite de $\{\varphi_n^1\}$ telle que, la suite $\{A_2\varphi_n^2\}$ soit convergente.

Remarquons que, la suite $\{A_1\varphi_n^2\}$ est une sous suite de la suite convergente $\{A_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour converge.

En raisonnant de la même façon. pour les opérateurs $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$, on détermine les suites $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, \dots, \{\varphi_n^p\}, \dots$. Il est remarquer que la suite $\{\varphi_n^p\}$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites $\{A_k\varphi_n^p\}$ sont convergentes pour $(k = 1, 2, \dots, p)$.

Comme l'espace F est complet, pour la compacité de l'opérateur A il suffit de montrer que la suite $\{A\varphi_n^p\}$ est une suite de Cauchy, alors

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| \leq \|A\varphi_n^p - A_n\varphi_n^p\| + \|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| + \|A_n\varphi_n^q - A\varphi_n^q\|$$

Soit $\|\varphi_n\| \leq M$; choisissons n de sorte que l'on a $\|A - A_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, en suite choisissons N tel que, pour tous les $p > N$ et $q > N$, on a la relation $\|A_n\varphi_n^p - A_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$ car la suite $\{A_n\varphi_n^p\}$ est convergente.

Dans ce condition, on aura pour tout p et q suffisamment grands

$$\|A\varphi_n^p - A\varphi_n^q\| < \varepsilon.$$

Lemme 1.3.1

Soit G un sous espace fermé d'un espace normé E tel que, $G \neq E$, alors il existe un élément $\varphi \in E$, avec $\|\varphi\| = 1$ tel que, pour tout $\phi \in G$, on a

$$\|\varphi - \phi\| \geq a, \text{ avec } 0 < a < 1$$

Théorème 1.3.5

L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Démonstration

Soit φ_1 un élément de E , tel que $\|\varphi_1\| = 1$, alors $G_1 = \text{span}\{\varphi_1\}$ est un sous espace fermé de E car G_1 est de dimension finie. D'Après le lemme il existe un élément $\varphi_2 \in E$, tel que $\|\varphi_2\| = 1$ et $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \frac{1}{2}$. prenons une deuxième fois le sous espace fermé $G_2 = \text{span}\{\varphi_1 - \varphi_2\}$, il existe alors un élément $\varphi_3 \in E$ avec $\|\varphi_3\| = 1$, $\|\varphi_1 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$ et $\|\varphi_2 - \varphi_3\| > \frac{1}{2}$. on répète la même procédure jusqu'à l'obtention d'une suite $\{\varphi_n\}$ vérifiant $\|\varphi_n\| = 1$ et $\|\varphi_n - \varphi_m\| > \frac{1}{2}$, pour tout $m \neq n$.

Il est à remarquer que cette suite $\{\varphi_n\}$ est bornée mais elle ne contient aucune sous suite convergente.

Corollaire 1.3.1

La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.

En effet. Il suffit d'appliquer le théorème (1.3.5). car la boule unité $B(0,1)$ est sa propre image dans l'espace X de dimension infinie par l'opérateur identique.

Théorème 1.3.6

Un opérateur compact est un opérateur borné. la réciproque est fausse.

Démonstration

En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X, \|x\| = 1\}.$$

La boule fermée de rayon l'unité. alors l'ensemble $\overline{A(B(0,1))}$ est compact, donc borné, c'est à dire

$$\|Ax\| < \infty \text{ et par conséquent, } \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty.$$

Ce qui signifie que l'opérateur A est borné.

Réciproquement. l'opérateur identique I de E dans E est borné mais il n'est pas compact.

1.3.2 Opérateur intégrant**Théorème 1.3.7**

L'opérateur intégral A de $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Démonstration

Soit E un ensemble borné de $C(G)$ alors, on a

$$\|\varphi\| \leq M \text{ pour tout } \varphi \in E$$

De plus

$$|A\varphi(x)| \leq M |G| \max_{x,y \in G} |K(x,y)|. \forall x \in G \text{ et } \forall \varphi \in E.$$

Cela veut dire que $A(E)$ est borné.

L'opérateur K est uniformément continu sur le compact $G \times G$, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in G, |x - y| < \delta \implies |k(x, y) - k(y, z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$$

D'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G, \text{ avec } |x - y| < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact d'après le théorème d'Arzélà-Ascoli. Alors A est compact.

1.3.3 Opérateur adjoint

Définition 1.3.2

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F , alors pour tout $\varphi \in E$ et $\psi \in F$, on définit les fonctions linéaires bornées $U \in F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{k})$ et $V \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ avec $\mathbb{k} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ comme suit

$$F \rightarrow \mathbb{k}$$

$$U : \psi \rightarrow U(\psi)$$

L'opérateur noté A^* défini sur F^* dans E^* est dit opérateur adjoint de A si l'on a, pour tout $U \in F^*$ et $V \in E^*$

$$F^* \rightarrow E^*$$

$$A^* : \psi \rightarrow A^*(U) = U(A(\varphi)) = V(\varphi)$$

Ou encore

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{u} \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$$

$$A^* = U \circ A : \varphi \rightarrow A(\varphi) \rightarrow U(A(\varphi))$$

Lemme 1.3.2

Soit φ un élément d'un espace normé E , ($\varphi \in E$) alors, il existe une fonction linéaire $V \in E^*$ telle que $\|V\| = 1$ avec

$$V(\varphi) = \|\varphi\|$$

Démonstration

Il suffit de voir le théorème de Hahn-Banach dans les espaces normés.

Lemme 1.3.3

Soit φ un élément d'un espace normé E , ($\varphi \in E$) alors, la norme $\|\varphi\|$ est défini par

$$\|\varphi\| = \max \{|V(\varphi)| ; V \in E^*, \|V\| = 1\}$$

Démonstration

En vertu de lemme 1, il existe $U \in E^*$ telle que $\|U\| = 1$ avec la relation $U(\varphi) = \|\varphi\|$. D'où pour tout $V \in E^*$, avec $\|V\| = 1$, on a

$$|V(\varphi)| \leq \|\varphi\| = U(\varphi)$$

Proposition 1.3.1

Soit A un opérateur linéaire borné défini sur espace normé E à valeurs dans un espace normé F alors, l'opérateur Adjoint A^* est un opérateur linéaire borné de F^* dans E^* . De plus, On a

$$\|A\| = \|A^*\|$$

Démonstration

Pour tout $\varphi \in E$, on pose

$$V(\varphi) = U(A(\varphi))$$

Ou encore

$$V = A^*(U) = U(A)$$

Il est claire que la fonction $V(\varphi) = U(A(\varphi))$ est bornée comme produit de deux opérateur bornés la fonction U et l'opérateur A . Autrement dit

$$\|A^*(U)\| \leq \|A^*\| \|U\|$$

De plus, on a

$$\|A^*(U)\| = \|U(A)\| \leq \|U\| \|A\|$$

D'ou on obtient

$$\|A^*\| \leq \|A\|$$

Inversement, en vertu du lemme2, il vient

$$\begin{aligned} \|A(\varphi)\| &= \max \{|U(A(\varphi))|; U \in E^*, \|U\| = 1\} \\ &= \max \{|A^*(U(\varphi))|; U \in E^*, \|U\| = 1\} \\ &\leq \|A^*\| \|\varphi\| \end{aligned}$$

D'ou, on obtient

$$\|A^*\| = \|A\|$$

Chapitre 2

Equation Daugavet

2.1 Introduction

La propriété de Daugavet est une propriété en mathématiques, dans le domaine de l'analyse fonctionnelle.

Le résultat suivant fut mis en évidence par I. K. Daugavet en 1963 pour tout opérateur compact T sur l'espace de Banach $C([0, 1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, on a l'égalité $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$ où Id désigne l'identité sur X . Cette dernière équation est connue sous le nom de équation de Daugavet.

Jusqu'à la fin des années 1990, on cherche à étendre cette propriété à d'autres classes d'opérateurs ou à d'autres types d'espaces. Citons par exemple les espaces de Lebesgue L_p .

Définition 2.1.1

On pose, pour $p \geq 1$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable tq } \|f\|_p < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

On pose également

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable tq } \|f\|_\infty < \infty \}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{ M \geq 0 : |f(x)| \leq M \text{ presque partout} \}$$

Il est facile à vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et f mesurable: $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$, ou nous convenons que $0 \cdot \infty = 0$

L'espace $L^p(\Omega)$: considérons la relation d'équivalence sur \mathcal{L}^p définie par $f \mathfrak{R} g \Leftrightarrow f = g$ p.p, i.e $\|f - g\| = 0$

$$L^p = \mathcal{L}^p / \mathfrak{R} = \{[f], f \in \mathcal{L}^p\} \text{ telle que } [f] = \{g \in \mathcal{L}^p : f = g \text{ p.p}\}$$

Définition 2.1.2

Un opérateur continue $T : X \rightarrow X$ dans un espace de Banach est dit satisfait équation de Daugavet si

$$\|I + T\| = \|I\| + \|T\|$$

Tel que I est l'opérateur identité.

Théorème 2.1.1

Si E est un Arbitrare Atomless Al-ou AM-espace alors chaque opérateur compact $T : X \rightarrow X$ satisfait équation de Daugavet.

Théorème 2.1.2

Si E est un AL-ou un AM-espace et $T : E \rightarrow E$ est un opérateur continue. il existe un signe θ (i.e $\theta = \{-1, 1\}$) tel que $\|I + \theta T\| = 1 + \|T\|$.

Définition 2.1.3

On dit qu'un espace de Banach E est uniformément convexe si: $\forall 0 < \varepsilon \leq 2, \exists 0 < \delta \leq 1$ et $x, y \in E$ tq $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ et $\|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < 1 - \delta$.

ou bien on a la relation $\|x_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + y_n) \right\| = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

2.1.1 Le spectre d'un opérateur

Définition 2.1.4

On appelle spectre de A , et on note $\sigma(A)$, le complémentaire de $p(A)$ dans C i.e

$$\sigma(A) = \{\lambda \in C \text{ tel que } (A - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}$$

Théorème 2.1.3

Le spectre de tout opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est un compact non vide de C .

Le spectre de l'opérateur adjoint de A est donné par:

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \{\bar{\lambda}/\lambda \in \sigma(A)\}$$

2.2 Equation de Daugavet

Lemme 2.2.1

Deux vecteurs u et v dans un espace normé satisfont $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha \|x\| + \beta \|y\| \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$

En particulier un opérateur continue $T : X \rightarrow X$ dans un espace de Banach satisfait l'équation Daugavet si et seulement si l'opérateur αT satisfait l'équation de Daugavet pour chacun $\alpha \geq 0$.

Preuve.

Soient deux vecteurs u and v dans espace vectoriel normé satisfont $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ et soient $\alpha, \beta \geq 0$.

on pose $\alpha \geq \beta \geq 0$ ■

$$\begin{aligned} \|\alpha u + \beta v\| &= \|\alpha(u + v) - (\alpha - \beta)v\| \\ &\geq \alpha \|u + v\| - (\alpha - \beta) \|v\| \\ &\geq \alpha(\|u\| + \|v\|) - (\alpha - \beta) \|v\| \\ &= \alpha \|u\| + \beta \|v\| \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|\alpha u + \beta v\| = \alpha \|u\| + \beta \|v\|.$$

On dit que un nombre complexe λ appartient au spestre du point d'approximation d'opérateur T si il existe une séquence des vecteurs $\{x_n\}$ avec $\|x_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - \lambda x_n\| = 0$.

Théorème 2.2.1

Si X un espace de Banach uniformément convexe, puis l'opérateur continue $T : X \rightarrow X$ satisfait l'équation Daugavet $\|I + T\| = \|I\| + \|T\|$ si et seulement si la norme $\|T\|$ se trouve dans le spectre du point d'approximation de T .

Preuve.

Soit $\|T\|$ un point d'approximation de spectre d'opérateur $T : X \rightarrow X$ où X est un espace de Banach pas nécessairement uniformément convexe, prend une séquence $\{x_n\}$ telle que $\|x_n\| \leq 1$ ■

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\|T\| x_n - Tx_n\| &= 0 \\ \|I + T\| &\geq \|(I + T)x_n\| \\ &\geq \|x_n + \|T\| x_n\| - \|\|T\| x_n - Tx_n\| \\ &\geq 1 + \|T\| - \|\|T\| x_n - Tx_n\| \end{aligned}$$

Donc en prenant la limite, on voit $1 + \|T\| \geq \|I + T\| \geq 1 + \|T\|$, alors T satisfait l'équation de Daugavet

pour l'inverse, suppose qu'un opérateur continu T non nul dans un espace de Banach satisfait l'équation Daugavet.

Lemme 2.2.2

On a l'opérateur $S = \frac{T}{\|T\|}$ (dont la norme est égale à un) aussi satisfait l'équation Daugavet i.e

$$\|I + S\| = \sup_{\|x\|=1} \|x + Sx\| = 1 + \|S\| = 2$$

Ainsi, il existe une séquence de vecteur $\{x_n\}$ avec $\|x_n\| = 1$ pour chaque n , et tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + Sx_n\| = 2$$

implique $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\frac{1}{2}(Sx_n + x_n)\| = 1$, et depuis un espace de Banach X est uniformément convexe, on déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\frac{1}{2}(Sx_n + x_n)\| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{T}{\|T\|} x_n - x_n \right) \right\| = 0$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - \|T\| x_n\| = 0$, donc $\|T\|$ est un point approximé de spectre de T .

Le théorème précédent est réalisé dans un dual uniformément convexe.

Un espace de Banach est uniformément lisse (respectivement uniformément convexe) si et seulement si sa norme dual est uniformément lisse (respectivement uniformément convexe), et aussi un espace de Banach est uniformément lisse si et seulement si sa norme est uniformément fortement différentiable.

Un opérateur satisfait l'équation de Daugavet si et seulement si son adjoint satisfait l'équation de Daugavet puisque le spectre d'un opérateur est le même que celui de son adjoint.

Définition 2.2.1

Un espace de Banach est dit un espace uniformément lisse si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \|x\| \geq 1, \|y\| \geq 1 \text{ et } \|x - y\| < \delta \implies \|x + y\| \geq \|x\| + \|y\| - \varepsilon \|x - y\|$$

Théorème 2.2.2

Un opérateur continue T Dans un espace de Banach satisfait l'équation de Daugavet si et seulement si sa norme $\|T\|$ réside dans le spectre de point d'approximation de T .

Corollaire 2.2.1

Un opérateur compact T dans un espace de Banach uniformément convexe (ou uniformément lisse) satisfait l'équation de Daugavet si et seulement si sa norme $\|T\|$ est une valeur propre de T .

Corollaire 2.2.2

Un opérateur compact $T : L_p(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ ($1 < p < \infty$) satisfait l'équation de Daugavet si et seulement si sa norme $\|T\|$ est une valeur propre de T .

2.2.1 produit tensoriel

Définition 2.2.2 *Soient $f(x), x \in \mathbb{R}^d$, et $g(y), y \in \mathbb{R}^k$, deux fonction localement intégrables sur \mathbb{R}^{d+k} , et l'on peut définir une distribution sur \mathbb{R}^{d+k}*

$$\begin{aligned} \langle f(x)g(y), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{d+k}} f(x)g(y)\varphi(x, y)dx dy \\ &= \int f(x) \left\{ \int g(y)\varphi(x, y)dy \right\} dx \end{aligned}$$

Définition 2.2.3 *Soit $f \in D'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in D'(\mathbb{R}^k)$ on définit le produit tensoriel de f et g comme une distribution $h \in D'(\mathbb{R}^{d+k})$ telle que:*

$$\langle h, \varphi \rangle = \langle f(x), g(y)\varphi(x, y) \rangle$$

Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^{d+k})$ on note $h = f(x) \otimes g(y)$.

Il faut vérifier que le produit est bien défini.

On considère le plus simple des opérateurs de rang-un non-trivial T agissant sur les $L_p[0, 1]$: donné par:

$$T = f \otimes g$$

Telle que f et g sont des fonctions mesurables bornées, alors l'opérateur T de rang un est compact, donc il satisfait l'équation de Daugavet dans $L_1[0, 1]$ et $L_\infty[0, 1]$, i.e

$$\|I + T\|_1 = 1 + \|T\|_1 \text{ et } \|I + T\|_\infty = 1 + \|T\|_\infty$$

Si les fonctions f et g satisfont $\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu = 0$, alors l'opérateur T n'a pas de valeur propre non nulle et donc pour $1 < p < \infty$ l'opérateur T ne satisfait pas l'équation de Daugavet sur les $L_p[0, 1]$.

Théorème 2.2.3

Un opérateur continu $T : X \rightarrow X$ dans un espace de Banach espace de Banach uniformément convexe (ou uniformément lisse) satisfait l'équation de Daugavet et on a $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ est une série telle que $\alpha_n \geq 0$ et pour toute $n \geq 0$. Si $f(\|T\|) < \infty$, Donc l'opérateur continu $f(T)$ satisfait l'équation de Daugavet et $\|f(T)\| = f(\|T\|)$, i.e on a:

$$\|I + f(T)\| = 1 + \|f(T)\| = 1 + f(\|T\|)$$

En particulier, on a les conséquences suivantes:

1- pour toute $n = 0, 1, 2, \dots$ l'opérateur continu T^n satisfait l'équation de Daugavet, et $\|T^n\| = \|T\|^n$. i.e $\|I + T^n\| = 1 + \|T\|^n = 1 + \|T\|^n$.

2- Si le polynôme $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_n \lambda^n$ satisfait $\alpha_i \geq 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$, l'opérateur $p(T)$ satisfait l'équation de Daugavet et $\|p(T)\| = p(\|T\|)$.

3- pour toute $\alpha \geq 0$, l'opérateur continu $e^{\alpha T}$ satisfait l'équation de Daugavet et $\|e^{\alpha T}\| = e^{\alpha \|T\|}$.

Preuve.

On a l'espace de Banach X , l'opérateur continu $T : X \rightarrow X$, et la fonction $f(\lambda)$ satisfait l'hypothèse du théorème précédent, par le théorème 2.2 et 2.3 On a une séquence $\{x_n\}$ des vecteurs unitaire de X telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - \|T\| x_n\| = 0$.

Pour Démontrer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^k x_n - \|T\|^k x_n\| = 0$, on utilise la démonstration par récurrence

Pour

$k = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx_n - \|T\| x_n\| = 0$ est satisfait.

On suppose quelle est vrai pour $K \in \mathbb{N}$, et on démontré quelle est vrai pour $k + 1$

$$T^{k+1}x_n - \|T\|^{k+1}x_n = T(T^k x_n - \|T\|^k x_n) + \|T\|^k (Tx_n - \|T\| x_n)$$

Par passage à la limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{k+1}x_n - \|T\|^{k+1}x_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T(T^k x_n - \|T\|^k x_n) + \|T\|^k (Tx_n - \|T\| x_n)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\| \|T^k x_n - \|T\|^k x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|^k \|Tx_n - \|T\| x_n\| \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{k+1}x_n - \|T\|^{k+1}x_n\| = 0$$

Maintenant on veut démontré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(T)x_n - f(\|T\| x_n)\| = 0$

Soit $\varepsilon > 0$, on fixe la somme m telle que $\sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i \|T\|^i < \varepsilon$ et la somme n_0 telle que

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \|T^i x_n - \|T\|^i x_n\| < \varepsilon \text{ pour tout } n \geq n_0, \text{ donc pour } n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} \|f(T)x_n - f(\|T\| x_n)\| &= \left\| \sum_{i=0}^m \alpha_i (T^i x_i - \|T\|^i x_n) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^m \alpha_i \|T^i x_i - \|T\|^i x_n\| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i \|T^i x_i - \|T\|^i x_n\| \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i \|T\|^i + \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i \|T\|^i < 3\varepsilon \end{aligned}$$

ce que implique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(T)x_n - f(\|T\| x_n)\| = 0$$

Donc le nombre $f(\|T\|)$ se trouve dans le spectre d'un point d'approximation de $f(T)$, puisque $\|f(T)\| \leq f(\|T\|)$ et le spectre de $f(T)$ se trouve à l'intérieur du disque fermé de centre zéro et de rayon $\|f(T)\|$. On déduit que $\|f(T)\| = f(\|T\|)$.

Par le théorème (2.2.1) et (2.2.2), donc l'opérateur $f(T)$ satisfait l'équation de Daugavet

. ■

Définition 2.2.4

Soit X un espace de Banach, on dit que X est localement uniformément convexe: $\forall x, y \in X : \|x\| = 1$ et $\|y\| \leq 1$, $\forall \varepsilon \quad 0 < \varepsilon \leq 2, \exists \quad 0 < \delta < 1$ (dépend ε et x), et $\|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < 1 - \delta$

On remarque que dans un espace de Banach localement uniformément convexe $\|x_n\| \leq 1$ pour tout n , $\|x\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2} (x_n + x) \right\| = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Théorème 2.2.4

Un opérateur compact $T : X \rightarrow X$ dans un espace de Banach localement uniformément convexe satisfait l'équation de Daugavet si et seulement si sa norme $\|T\|$ est une valeur propre de T .

Preuve.

Soit $T : X \rightarrow X$ est un opérateur compact dans un espace de Banach uniformément convexe.

Si $\|T\|$ est une valeur propre de T , alors il est clair que $\|I + T\| = 1 + \|T\|$.

pour l'inverse, on suppose que T satisfait l'équation de Daugavet, par le lemme 32, on a l'opérateur compact $S = \frac{T}{\|T\|}$ satisfait l'équation de Daugavet, i.e

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \|x + Sx\| &= 1 + \|S\| \\ &= 2 \end{aligned}$$

On choisit une séquence $\{x_n\} \in X$ telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + Sx_n\| = 2 \dots (*)$

En utilisant la compacité de S , on peut supposer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_n - x\| = 0$, pour certain $x \in X$.

De

$$\begin{aligned} \|x_n + Sx_n\| &\leq \|x_n\| + \|Sx_n\| \\ &\leq 1 + \|Sx_n\| \\ &\leq 1 + 1 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Et (*), on déduit que

$$\|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_n\| = 1$$

Aussi de l'inégalité

$$\begin{aligned} \|x + Sx_n\| - \|Sx_n - x\| &\leq \|x_n + x\| \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

On voit ça $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| = 2$, ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2} (x_n + x) \right\| = 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$, par conséquence $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Sx_n - Sx\| = 0$, donc $Sx = x$, ou $(\frac{T}{\|T\|})x = x \implies Tx = \|T\|x$, donc la norme $\|T\|$ est une valeur propre de T . ■

Enfin, on ferme cette section par le résultat suivant:

Le théorème (2.2.1) n'est pas valable dans espace de Banach localement uniformément convexe

2.3 la propriété Daugavet

Définition 2.3.1

Un espace de Banach est dit satisfait la propriété de Daugavet si tout opérateur faiblement compact dans cet espace satisfait l'équation de Daugavet.

Théorème 2.3.1

Il existe un espace de Banach tel que tout opérateur faiblement compact satisfait l'équation de Daugavet. cet espace s'appelle espace de Banach ayant la propriété de Daugavet.

Définition 2.3.2 (d'un espace dual)

*Soient $(k, +, *)$ un corps commutatif et E un espace vectoriel l'ensemble $L(E, K)$ des formes linéaire sur E est un k -espace vectoriel appelé espace dual de E et note E^* .*

Théorème 2.3.2 *Un espace de Banach satisfait l'équation de Daugavet si et seulement si sa norme dual satisfait la propriété de Daugavet.*

L'espace L_p $1 < p < \infty$ ne satisfont pas la propriété de Daugavet, mais pour $p = 1$ ou $p = \infty$, l'espace $L_1(u)$ et l'espace $L_\infty(u)$ satisfont la propriété de Daugavet.

Théorème 2.3.3

Atomless AL-espaces et atomless Dedekind complet AM-espace avec des unités satisfont la propriété de Daugavet.

Pour la démonstration de ce théorème voir [1,page 225-228]

Bibliographie

- [1] Y.A.ABRAMOVICH, The Daugavet Equation in Uniformly Convex Banach Spaces,1989.
- [2] Y.A.ABRAMOVICH,A generalization of a theorem of J.Holub,1990.
- [3] Y.A.ABRAMOVICH, Some new classes of Banach spaces on which compact operators satisfy the Daugavet equation, J. Operator Theory, to appear.
- [4] V. F.BABENKO AND S.A.PICHUGOV, A property of compact operators in Banach spaces, 1981.
- [5] P.CHAUVEHEID, On a property of compact operators in Banach spaces,1982.
- [6] C.FOIAS AND I.SINGER, Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions,1965.
- [7] J.R.HOLUB, A property of weakly compact operators on $C[0, 1]$.1986.
- [8] A.R.LOVAGLIA, Locally uniformly convex Banach spaces.1955.
- [9] M.NADIR.Cours analyse fonctionnel, univesité de M'sila, Algérie 2004

Résume :

La propriété de Daugavet est une propriété en mathématiques, dans le domaine de l'analyse fonctionnelle.

Le résultat suivant fut mis en évidence par I. K. Daugavet en 1963 pour tout opérateur compact T sur l'espace de Banach $C([0,1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, on a l'égalité $\|Id+T\|=1+\|T\|$ où Id désigne l'identité sur X . Cette dernière équation est connue sous le nom d'équation de Daugavet.

Jusqu'à la fin des années 1990, on cherche à étendre cette propriété à d'autres classes d'opérateurs ou à d'autres types d'espaces. Citons par exemple les espaces de Lebesgue L_p

Abstract :

The property of Daugavet is a property in mathematics, in the field of functional analysis.

The following result was demonstrated by IK Daugavet in 1963 for any compact operator T on the Banach space $C([0,1])$ of the continuous functions on the interval $[0,1]$, we have the equality $\|Id+T\|=1+\|T\|$ where Id designates the identity on X . This last equation is known under the name of Daugavet equation.

Until the end of the 1990, this property was extended to other classes of operators or other types of spaces. For example, the spaces of Lebesgue L_p

ملخص:

إن معادلة دوقافات، عبارة عن خاصية رياضية في مجال التحليل الدالي.

تم برهنة هذه النتيجة من طرف دوقافات في عام 1963م لأي مؤثر متراص T على فضاء بناخ $C([0,1])$ للدوال المستمرة على المجال $[0,1]$ ، لدينا المساواة $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$ حيث Id تشير إلى المؤثر الحياضي على الفضاء X . وتعرف هذه المعادلة الأخيرة باسم معادلة دوقاف.

حتى نهاية التسعينات، تم تمديد هذه الخاصية لتشمل فئات أخرى من المؤثرات أو أنواع أخرى من الفضاءات على سبيل المثال، فضاءات لوباق L_p .